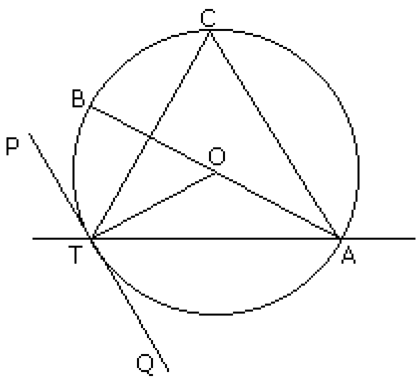
MATEMÁTICA
MÓDULO 2
Eje temático: Geometría

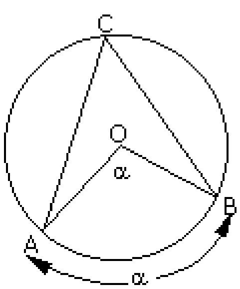
1. PROPIEDADES ANGULARES EN LA CIRCUNFERENCIA

Comencemos este breve estudio acerca de las propiedades angulares en la circunferencia describiendo algunos elementos básicos:



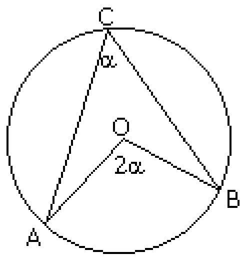
$\overline{AO}$: radio.
$\overline{AB}$: diámetro.
$\overleftrightarrow{AT}$: es una recta secante.
$\overleftrightarrow{PQ}$: es una recta tangente.
$\measuredangle$AOT: es un ángulo del centro.
$\measuredangle$ACT: es un ángulo inscrito.
$\measuredangle$ATQ: es un ángulo semiinscrito.

Medida angular de un arco: la medida angular de un arco es equivalente a la medida del ángulo central que le corresponde a dicho arco.

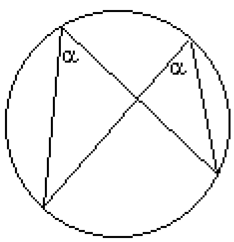


Veamos a continuación una lista de propiedades angulares en la circunferencia:

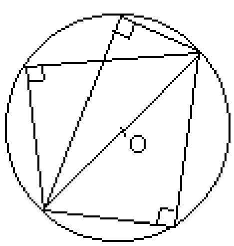
(1) El ángulo inscrito mide la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.



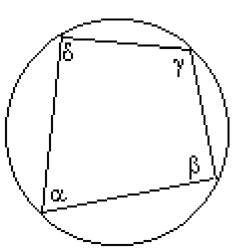
(2) Ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes.



(3) Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

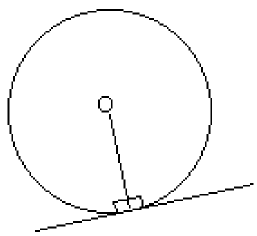


(4) En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios.

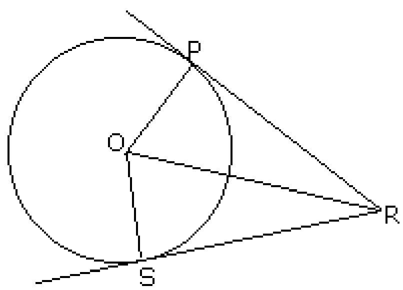


$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

(5) Toda recta tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.

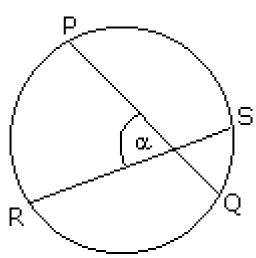


(6) Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos segmentos tangentes, estos son congruentes.



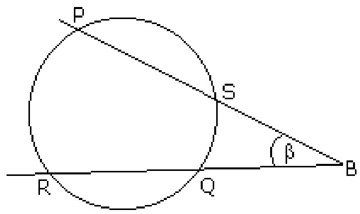
RP = RS

(7) El ángulo formado por dos cuerdas equivale a la semi-suma de las medidas de los arcos que interceptan.



$$\alpha = \frac{\overline{PR} + \overline{QS}}{2}$$

(8) El ángulo formado por dos rectas secantes a una circunferencia equivale a la semi-diferencia de los arcos que interceptan.

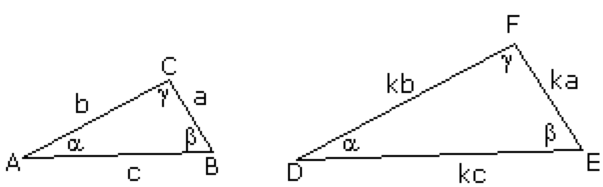


$$\beta = \frac{\overline{PR} - \overline{QS}}{2}$$

2. TRIÁNGULOS SEMEJANTES

2.1. Concepto de semejanza

En el Módulo 1, vimos que dos triángulos congruentes tenían la misma forma y el mismo tamaño. Sin embargo, cuando dos triángulos tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, se denominan triángulos *semejantes*.



Cuando dos triángulos son semejantes, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes proporcionales:

Ángulos correspondientes congruentes:

$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$
$\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$
$\measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE$

Lados correspondientes proporcionales:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$$

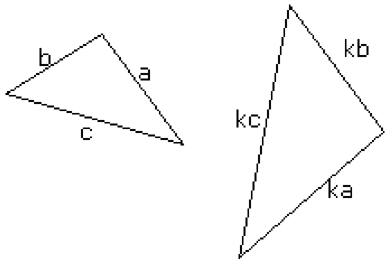
La razón de semejanza, entonces, se denomina **k**.
Observación: si k = 1, los triángulos serían congruentes.

Al igual que en la congruencia, aquí se presentan los denominados *criterios de semejanza*, que constituyen las condiciones mínimas necesarias para establecer que dos triángulos son semejantes.

2.2. Criterios de semejanza

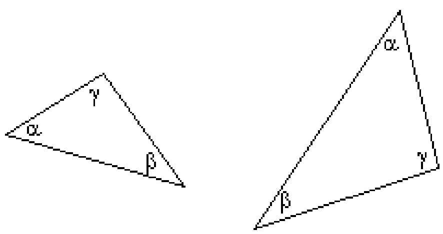
Criterio (L,L,L)

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.



Criterio (A,A,A)

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.

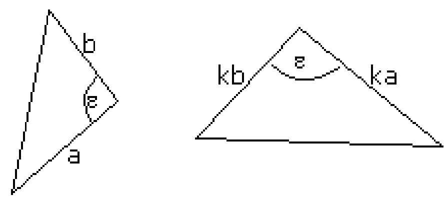


Observación:

Como los ángulos del triángulo suman 180°, bastaría con determinar dos ángulos correspondientes congruentes para poder establecer la semejanza (criterio (A,A)).

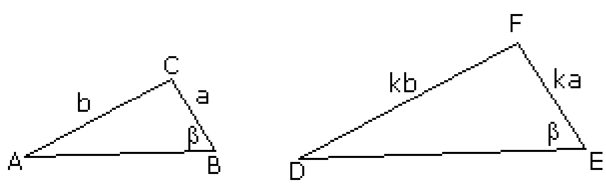
Criterio (L,A,L)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados correspondientes proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados son congruentes.



Criterio (L,L,A>)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados correspondientes proporcionales y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados son congruentes.

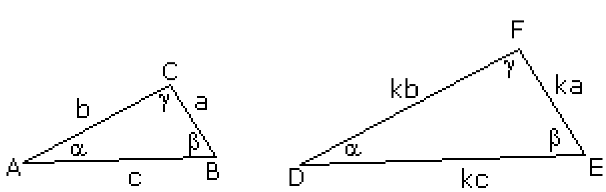


r la semejanza, debe darse que

b > a y $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$

2.3. Teorema de la semejanza

Si dos triángulos son semejantes, con razón de semejanza k, entonces sus perímetros están en la razón k y sus áreas en la razón k^2.



En la figura:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

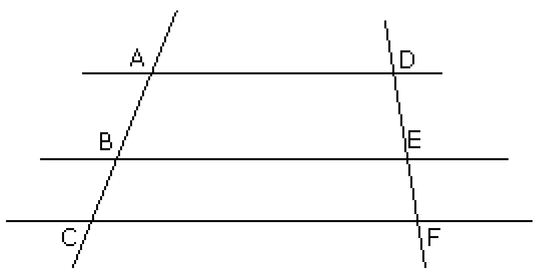
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Perímetro } \Delta ABC}{\text{Perímetro } \Delta DEF} = k$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Área } \Delta ABC}{\text{Área } \Delta DEF} = k^2$$

2.4. Teorema de Thales

Si tres o más rectas paralelas se cortan por dos secantes, los segmentos determinados en una de las secantes son proporcionales a los segmentos determinados en la otra secante.



Si $\overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ o bien $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ (u otras equivalentes), el recíproco de este teorema también es válido, es decir, si los segmentos determinados en las secantes son proporcionales, entonces las rectas son paralelas.

Ejemplo:

En la figura anterior, se cumple que: $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{4}$ y $DF = 27$ cm

¿Cuánto mide EF?

Como $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{BC} = \frac{9}{4}$

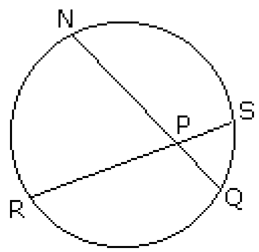
pero $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$, por lo tanto $\frac{9}{4} = \frac{27}{x} \Rightarrow x = 12$

2.5. Segmentos proporcionales en el círculo

A través de la semejanza de triángulos se pueden demostrar los siguientes teoremas:

Teorema de las cuerdas

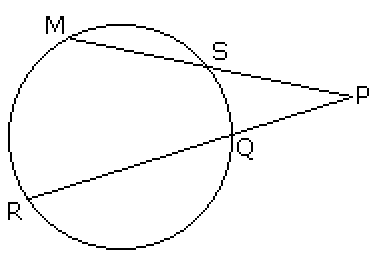
Si dos cuerdas se intersectan en el interior de un círculo, el producto de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los segmentos determinados en la otra cuerda.



NP · PQ = PS · PR

Teorema de las secantes

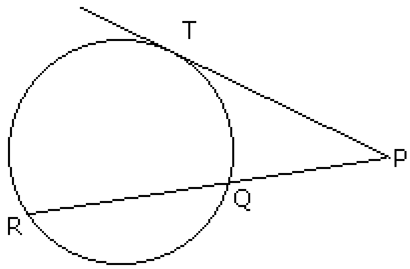
Si desde un punto exterior a un círculo se trazan dos rectas secantes, entonces el producto del segmento exterior con el segmento total determinados en una de las secantes será igual a los segmentos respectivos en la otra secante.



PS · PM = PQ · PR

Teorema de la secante y la tangente

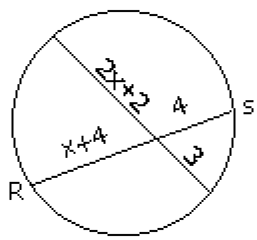
Si desde un punto exterior a un círculo se traza una recta secante y una tangente, entonces el producto del segmento exterior con el segmento total será igual al cuadrado del segmento tangente.



$PT^2 = PQ \cdot PR$

Ejemplo:

Según la información dada en la figura, ¿cuánto mide RS?



Por el teorema de las cuerdas, tenemos que:

$4(x+4) = 3(2x+2)$
$4x+16 = 6x + 6$
$2x = 10$
$x = 5$

Pero como $RS = x+8$, reemplazando obtenemos $RS = 13$.

Sitios sugeridos

Para el estudio de las propiedades angulares de la circunferencia:

http://www.dmae.upct.es/~pepemar/home.htm
http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/circunf/anguloscircun.htm
http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/circunf/inscrito.htm (incluye Applets)

Sitio recomendado para el estudio del concepto de semejanza:

http://descartes.cnice.mecd.es/4a_eso/Semejanza/figuras_semejantes.htm

Para profundizar más o ejercitar acerca de los criterios de semejanza, te sugerimos visitar el sitio:

http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/GeometriaInteractiva/IIICiclo/NivelIX/ConceptodeSemejanza/SemejanzadeTriangulos.htm (Applet)

En el siguiente sitio web podrás trabajar interactivamente comprobando el teorema de Thales:

http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/GeometriaInteractiva/IIICiclo/NivelIX/TeoremadeThales/TeoremadeThales.htm