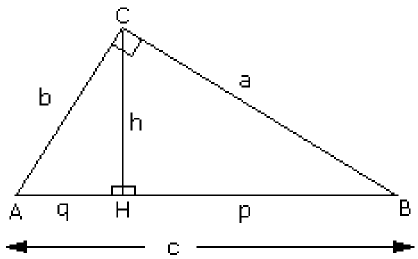
MATEMÁTICA
MÓDULO 3
Eje temático: Geometría

1. SEGMENTOS PROPORCIONALES EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En el ΔABC rectángulo en C de la figura:



Se pueden establecer las siguientes semejanzas:

1)
$\Delta AHC : \Delta ACB \quad (A,A)$
$\angle CAH \cong \angle CAH$ (ángulo común)
$\angle AHC \cong \angle ACB$ (ángulos rectos)

De esta semejanza, se obtienen las siguientes proporciones:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{CB} \Leftrightarrow \frac{q}{b} = \frac{b}{c} = \frac{h}{a}$$

2)
$\Delta BHC : \Delta BCA \quad (A,A)$
$\angle CBH \cong \angle ABC$ (ángulo común)
$\angle BHC \cong \angle BCA$ (ángulos rectos)

De esta semejanza, se tiene:

$$\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB} = \frac{HC}{CA} \Leftrightarrow \frac{p}{a} = \frac{a}{c} = \frac{h}{b}$$

3)
$\triangle AHC \sim \triangle CHB$ (A,A)
$\angle CAH \cong \angle BCH$ (porque $\angle BCH = 90^\circ - \angle ACH$ y $\angle CAH = 90^\circ - \angle ACH$)
$\angle BHC \cong \angle BCA$ (ángulos rectos)

De aquí se obtienen las proporciones:

$$\frac{AH}{CH} = \frac{HC}{HB} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{q}{h} = \frac{h}{p} = \frac{b}{a}$$

De 1): $\frac{q}{b} = \frac{b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = qc$

De 2): $\frac{p}{a} = \frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = pc$

De 3): $\frac{q}{h} = \frac{h}{p} \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = pq$

Estas tres relaciones obtenidas corresponden al *Teorema de Euclides*.

1.1. TEOREMA DE EUCLIDES REFERENTE AL CATETO

El cuadrado de un cateto equivale al producto del cateto por la proyección de él sobre la hipotenusa.

$a^2 = pc$
$b^2 = qc$

1.2. TEOREMA DE EUCLIDES REFERENTE A LA ALTURA

El cuadrado de la altura equivale al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$h^2 = pq$

Además de los teoremas anteriores, se puede obtener una relación para determinar la altura a través de los lados del triángulo rectángulo:

De 2) tenemos que: $\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$, por lo tanto $h = \frac{ab}{c}$

Por lo tanto, la altura equivale al producto de los catetos dividido por la hipotenusa.

Otro teorema importante en el triángulo rectángulo es el siguiente:

1.3. TEOREMA DE PITÁGORAS

El cuadrado de la hipotenusa equivale a la suma de los cuadrados de los catetos.

$c^2 = a^2 + b^2$

Podemos demostrar este teorema utilizando los teoremas anteriores, como veremos a continuación:

Por Euclides tenemos que: $a^2 = pc$ y $b^2 = qc$, entonces

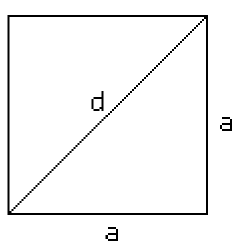
$a^2 + b^2 = pc + qc = c(p+q)$; pero $p+q=c$, si reemplazamos obtenemos:

$a^2+b^2= c(p+q)=c \cdot c = c^2$

1.4. APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Diagonal de un cuadrado

La diagonal de un cuadrado equivale al producto del lado por $\sqrt{2}$



$$\boxed{d = a\sqrt{2}}$$

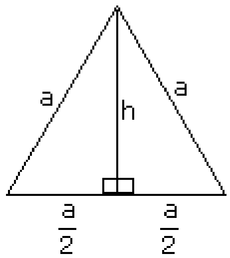
Demostración:

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = a^2 + a^2$
$d^2 = 2a^2 \quad / \sqrt{\ }$
$d = a\sqrt{2}$

Altura de un triángulo equilátero

La altura de un triángulo equilátero equivale a la mitad del lado por $\sqrt{3}$



$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Demostración:

Según la figura, por tratarse de un triángulo equilátero la altura cae en el punto medio del lado opuesto. Ocupando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

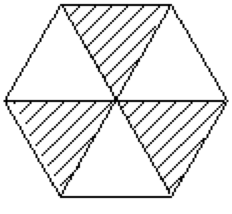
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad / \sqrt{\ }$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Ejemplo:

En la figura, el polígono es un hexágono regular cuyo lado mide 12 cm.
¿Cuánto mide la superficie sombreada?



Cada uno de los triángulos sombreados corresponde a un triángulo equilátero de lado 12 cm.

La altura, según la fórmula anterior es: $\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{12}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

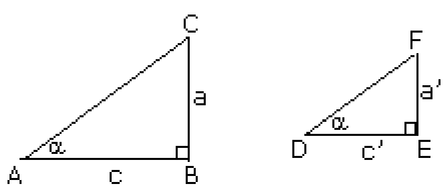
El área de cada triángulo sombreado es:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

Por lo tanto el área sombreada es: $\left(36\sqrt{3}\right) \cdot 3 = 108\sqrt{3}$ cm^2.

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Supongamos que tenemos los triángulos rectángulos ABC y DEF de la figura, que a su vez tienen un ángulo agudo α congruente.



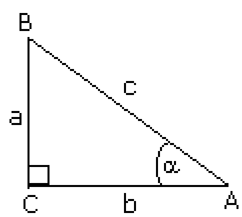
Por el criterio (A,A) los triángulos son semejantes, por lo tanto:

$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ o bien: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$

Es decir, si se conoce uno de los ángulos agudos, la razón entre dos lados del triángulo rectángulo es constante.

Debido a que la razón entre los lados es constante y depende exclusivamente del ángulo α, se establecieron todas las razones posibles entre dos de los lados del triángulo rectángulo. Estas razones se denominan *razones trigonométricas en el triángulo rectángulo* y se definen de la siguiente forma:

Sea el $\triangle$ABC, rectángulo en C de la figura:



Se definen las siguientes razones trigonométricas para el ángulo agudo α:

Razón trigonométrica	Definición	En la figura
$\text{sen } \alpha$	$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{a}{c}$
$\cos \alpha$	$\frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{b}{c}$
$\text{tg } \alpha$	$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$	$\frac{a}{b}$
$\text{ctg } \alpha$	$\frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$	$\frac{b}{a}$
$\sec \alpha$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$	$\frac{c}{b}$
$\text{cosec } \alpha$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$	$\frac{c}{a}$

2.1. PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Observa que las razones trigonométricas cumplen con las siguientes propiedades:

1) $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

2) $\text{ctg } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$

3) $\text{ctg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$

4) $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

5) $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$

6) $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$

7) $1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

Las propiedades 6 y 7 se llaman *identidades pitagóricas* y las demostraremos a continuación:

Demostración de 6:

En el ΔABC anterior, teníamos que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c};$$

$$\text{entonces } \text{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

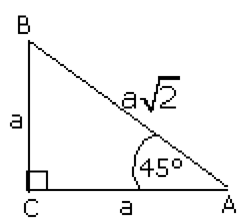
Demostración de 7:

$$1 + tg^2\alpha = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \sec^2 \alpha$$

Fíjate que en ambas demostraciones planteamos que $a^2 + b^2 = c^2$, motivo por el cual ambas identidades se denominan identidades pitagóricas.

2.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS DE 30°, 45° Y 60°

Si consideramos un triángulo rectángulo isósceles de cateto "a", entonces la hipotenusa mide $a\sqrt{2}$ (ver diagonal de un cuadrado)



Si en este triángulo calculamos las razones trigonométricas, obtenemos:

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\ 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

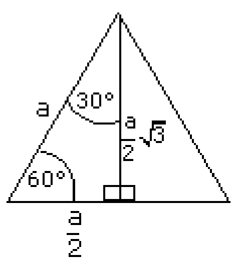
$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{ctg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec\ 45° = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 45° = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

Para calcular las razones trigonométricas para los ángulos de 30° y 60°, ocuparemos el triángulo equilátero de la figura:



En el triángulo rectángulo, se cumple que:

$$\text{sen } 30° = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} = \cos\ 60°$$

$$\cos\ 30° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen } 60°$$

$$\tan\ 30° = \frac{a/2}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{ctg } 60°$$

$$\text{ctg } 30° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a/2} = \sqrt{3} = \text{tg } 60°$$

$$\sec\ 30° = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \text{cosec } 60°$$

$$\text{cosec } 30° = \frac{a}{a/2} = 2 = \sec\ 60°$$

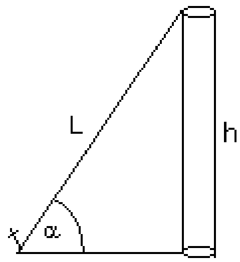
Resumiendo, las razones trigonométricas sen, cos y tan para 30°, 45° y 60° son:

α	sen α	cos α	tg α
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

2.3. APLICACIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL CÁLCULO DE DISTANCIAS

Ejemplo:

Un poste de altura h está sujeto por una cuerda de longitud L con un ángulo de inclinación α. ¿Cuál es la altura del poste?



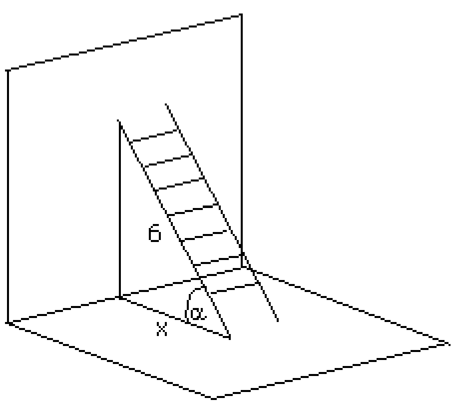
En el triángulo rectángulo de la figura se conoce la hipotenusa y se requiere calcular el cateto opuesto, por lo tanto ocupamos la razón trigonométrica sen α:

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{L} \quad \Rightarrow \quad h = L \cdot \text{sen } \alpha$$

Esta expresión nos permite calcular la altura del poste, una vez conocidos α y L.

Ejemplo:

Una escalera de 6 m de largo se apoya en un muro vertical con un ángulo de inclinación α. ¿A qué distancia se ubica la base de la escalera con respecto al muro?



En el triángulo rectángulo de la figura conocemos α, la hipotenusa, y deseamos calcular el cateto adyacente a α. Utilizando la razón trigonométrica cos α, tenemos:

$$\cos\ \alpha = \frac{x}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 6 \cdot \cos\ \alpha$$

Por lo tanto, la distancia que hay entre la base de la escalera y muro es 6 $\cdot$ cos α.

Sitios sugeridos

En los siguientes sitios puedes ver las demostraciones de los teoremas de Euclides y de Pitágoras a través de áreas:

Se recomiendan los excelentes applet que se encuentran en los sitios:

http://www.cnice.mecd.es/eos/MaterialesEducativos/mem2002/geometria_triangulo/teorema_del_cateto.htm

http://www.cnice.mecd.es/eos/MaterialesEducativos/mem2002/geometria_triangulo/teorema_de_pitagoras.htm

Sitio web recomendado para el estudio de la trigonometría en el triángulo rectángulo:

http://www.pntic.mec.es/Descartes/4a_eso/Razones_trigonometricas/Ratrigo.htm

Presentación Power Point

Acerca de Euclides y trigonometría en el triángulo rectángulo:

http://www.educarchile.cl/ntg/mediateca/1605/article-93090.html