

MATEMÁTICA**MÓDULO 4**

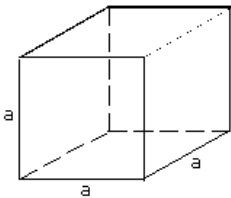
Eje temático: Geometría

1. ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS

A continuación repasaremos las fórmulas de áreas y volúmenes de aquellos cuerpos más importantes.

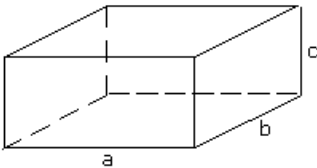
Área = A

Volumen = V

Cubo

$$A = 6a^2$$

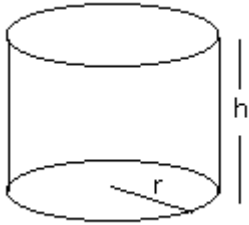
$$V = a^3$$

Paralelepípedo recto rectangular

$$A = 2ab + 2ac + 2bc$$

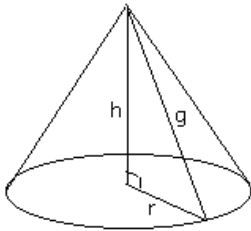
$$V = abc$$

Cilindro recto circular



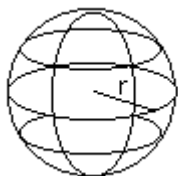
$$\begin{aligned} \text{Área basal} &= 2\pi r^2 \\ \text{Área lateral} &= 2\pi rh \\ \text{Área total} &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ V &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

Cono recto circular



$$\begin{aligned} \text{Área basal} &= \pi r^2 \\ \text{Área lateral} &= \pi rg \\ \text{Área total} &= \pi r^2 + \pi rg \\ V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned}$$

Esfera

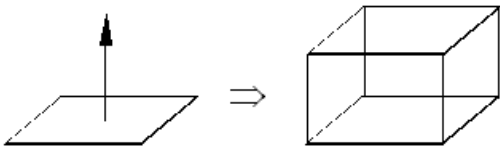


$$\begin{aligned} A &= 4\pi r^2 \\ V &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

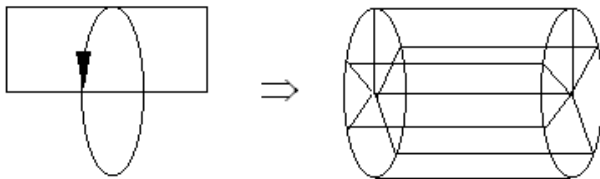
2. VOLÚMENES DE CUERPOS GENERADOS POR ROTACIÓN O TRASLACIÓN DE FIGURAS PLANAS

A continuación veremos los cuerpos que se generan al rotar o trasladar algunas figuras planas.

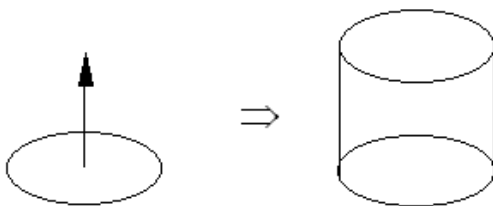
1) Si un cuadrado se traslada en una dirección perpendicular al plano que lo contiene, se genera un paralelepípedo de base rectangular.



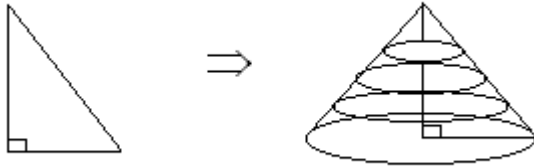
2) Si un rectángulo se rota en torno de uno de sus lados, se genera un cilindro recto circular.



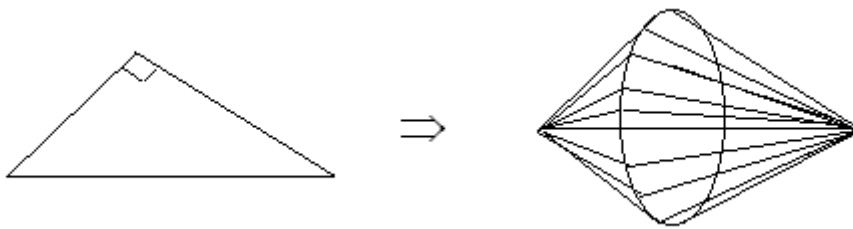
3) Si un círculo se traslada en dirección perpendicular al plano que la contiene, se genera un cilindro recto circular.



4) Si un triángulo rectángulo se rota en torno a uno de sus catetos, se forma un cono recto circular.



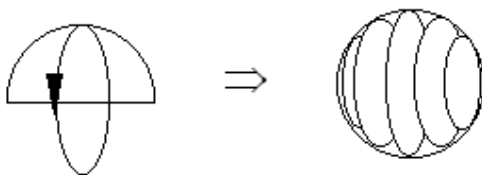
5) Si un triángulo rectángulo se hace girar en torno a su hipotenusa, se forman dos conos pegados en la base.



6) Si un cuadrante de un círculo se rota en torno a uno de sus radios frontera, se genera una semiesfera.

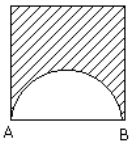


7) Si un semicírculo se rota en torno a su diámetro, se genera una esfera.



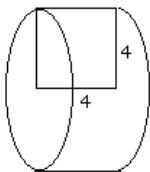
Ejemplo:

La figura está formada por un cuadrado de lado 4 cm y su circunferencia inscrita.



¿Cuál es el volumen del cuerpo generado al girar la figura sombreada en torno al lado \overline{AB} del cuadrado?

El cuadrado genera un cilindro de base y altura 4 cm:



El volumen del cilindro generado es, entonces, $\pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 64\pi \text{ cm}^3$.

El semicírculo genera una esfera de radio 2 cm, cuyo volumen es:

$$\frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3.$$

Por lo tanto el volumen pedido es: $64\pi - \frac{32}{3} \pi = \frac{160}{3} \pi \text{ cm}^3$.

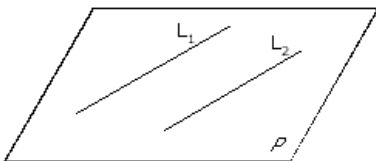
3. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

A continuación veremos una lista de teoremas y propiedades relativas a rectas y planos en el espacio.

3.1. Posiciones de dos rectas en el espacio

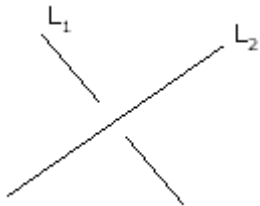
Dos rectas en el espacio, pueden ser paralelas, alabeadas o secantes.

Rectas paralelas



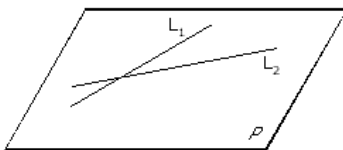
Dos rectas paralelas siempre están contenidas en un mismo plano.

Rectas alabeadas



Dos rectas alabeadas no se interceptan y no existe un plano que las contenga.

Rectas secantes

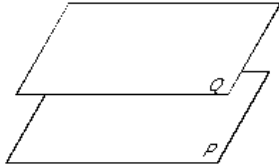


Dos rectas secantes son siempre coplanares (están en un mismo plano).

3.2. Posiciones de dos planos en el espacio

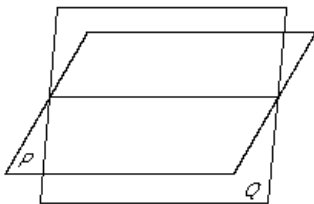
Dos planos en el espacio pueden ser paralelos o secantes.

Planos paralelos



Dos planos paralelos no tienen un punto en común.

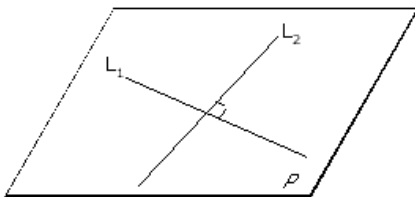
Planos secantes



Dos planos secantes se interceptan en una línea recta.

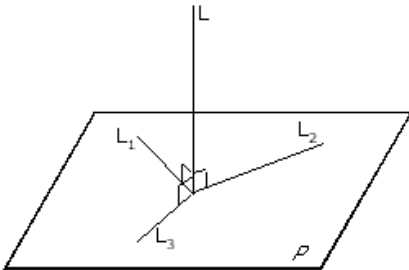
Planos y rectas perpendiculares

Dos rectas perpendiculares son secantes y se interceptan formando ángulos rectos.



3.3. Recta perpendicular a un plano

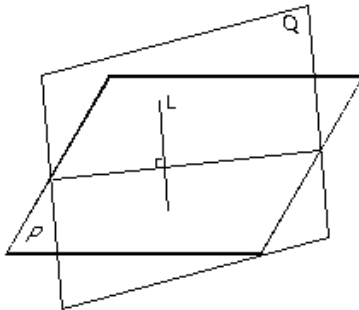
Una recta es perpendicular a un plano si todas las rectas del plano que pasan por el punto de intersección de la recta con el plano son perpendiculares a ella.



En la figura, todas las rectas del plano que pasan por el punto de intersección de L con el plano son perpendiculares a ella.

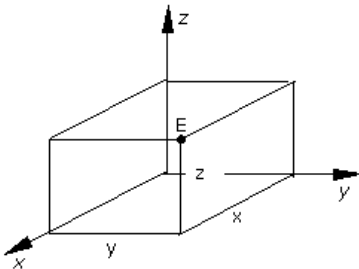
3.4. Planos perpendiculares

Dos planos son perpendiculares si uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro plano.



4. SISTEMA CARTESIANO TRIDIMENSIONAL

Un sistema cartesiano tridimensional está compuesto por tres planos perpendiculares entre sí, los cuales se interceptan en los ejes coordenados, los que se denominan ejes Ox , Oy y Oz .

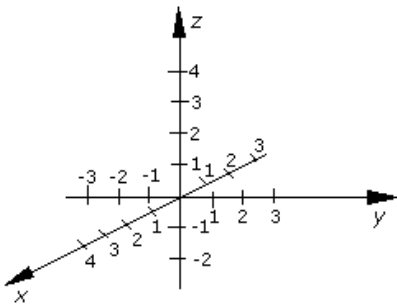


Las coordenadas del punto E de la figura son (x,y,z) .

La distancia signada x se llama *abscisa*, y se llama *ordenada* y z se llama *cota*.

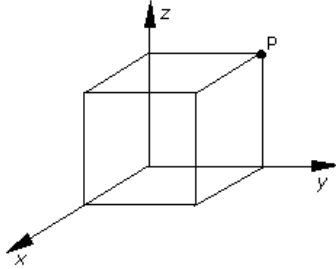
Los planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas *octantes*.

Los signos de las coordenadas se ilustran en la siguiente figura:



Ejemplo:

El cubo de la figura tiene una arista de 8 unidades y se ubica en el sistema cartesiano tal como se ilustra en la siguiente figura. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P?



En la figura, se cumple que $x = 0$; $y = 8$ y $z = 8$, por lo tanto, sus coordenadas son $(0,8,8)$.

Sitios sugeridos

Actividades de traslación y rotación de figuras planas:

<http://www.sectormatematica.cl/media/trayrot.htm>

Sitios que contienen animaciones de cuerpos de revolución:

Cilindro:

http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Cuerpos_d3/cilindros.htm

Esfera:

http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Cuerpos_d3/esferas.htm

Cono:

http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Cuerpos_d3/conos.htm

Cuerpos redondos:

http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Cuerpos_d3/redondos.htm

Ejercicios de planos y rectas:

<http://www.educarchile.cl/medios/171220049558.doc>

Software interactivo con sólidos geométricos 3D:

<http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/MATEGENERAL/t5-geometria/Geometria/node9.html>

Presentaciones Power Point

Solidos geométricos:

<http://www.santamaria.edu.pe/webareas/matematica/Gali/Webs/Presentaci%C3%B3n8.ppt>

<http://www.sectormatematica.cl/ppt/poliedros.ppt>

<http://www.educarchile.cl/ntg/mediateca/1605/article-93100.html>