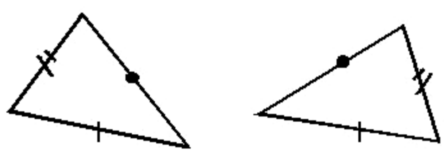
MATEMÁTICA
MÓDULO 1
Eje temático: Geometría

1. CRITERIOS DE CONGRUENCIA

Dos triángulos son congruentes cuando sus lados y ángulos correspondientes son congruentes entre sí. Como los elementos primarios de los triángulos (ángulos y lados) no son independientes, no es necesario para asegurar la congruencia que los tres ángulos y los tres lados correspondientes sean congruentes. La información mínima necesaria para que los triángulos sean congruentes responde a los llamados *criterios de congruencia*:

Criterio (L,L,L)

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son proporcionales:

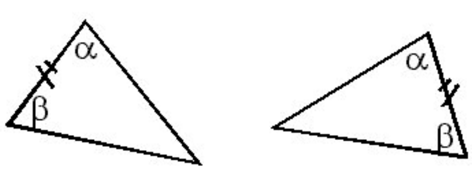


Criterio (L,A,L)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados correspondientes congruentes y el ángulo comprendido entre ellos.

Criterio (A,L,A)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos correspondientes congruentes y el lado comprendido entre ellos.



Criterio (L,L A>)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados correspondientes congruentes y el ángulo opuesto mayor de estos lados.

Puedes encontrar información acerca de transformaciones isométricas en el sitio:

http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/desarrolloconcepto/congruencia_desarrollo.htm

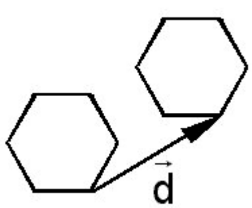
2. TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Una transformación isométrica es una transformación geométrica que conserva la medida de los lados de los ángulos. Es decir, una transformación isométrica convierte una figura en otra que es congruente a la original.

Las transformaciones que estudiaremos aquí son la *traslación*, el *giro* o *rotación*, la *reflexión en torno a un eje* y la *reflexión en torno a un punto*.

2.1. Traslación

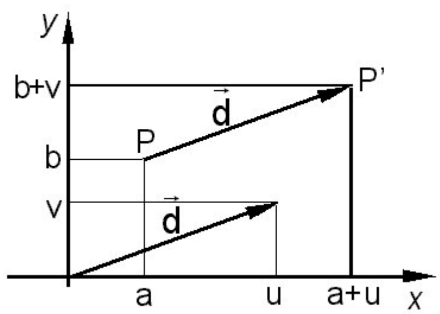
Cuando movemos paralelamente una cierta figura en una dirección, lo que estamos efectuando es una *traslación*.



Observa que la traslación queda completamente determinada si conocemos el vector de la dirección del movimiento, ya que podríamos obtener la imagen de todos los puntos de la figura.

Traslación en un sistema cartesiano

Si el punto P(a,b) lo trasladamos en la dirección $\vec{d}\,(u,v)$ se transforma en el punto P'(a+u,b+y).



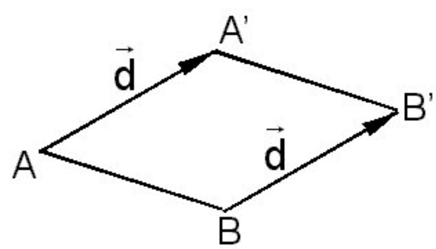
Ejemplo:

¿En qué posición queda el punto A(-3,4) si lo trasladamos en la dirección $\vec{d}\,(5,6)$?

El punto A(-3,4) se traslada al punto: A' (-3+5,4+6) = A'(2,10).

Propiedades de la traslación

Supongamos que el segmento $\overline{AB}$ de la figura se ha trasladado en la dirección del vector $\vec{d}$.



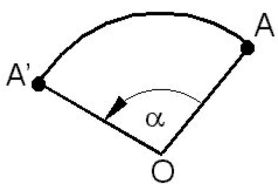
Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(1) AB = B'A'
(2) ABB'A' es un paralelogramo

Las propiedades anteriores se pueden demostrar a través de la congruencia de los triángulos ABA’ y B’A’B.

2.2. Giro o rotación

Si giramos una figura en torno a un punto O, obtenemos una figura congruente a la original.



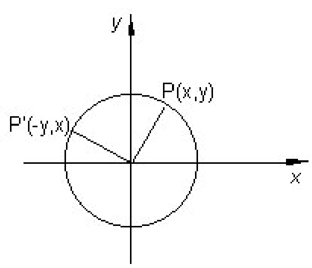
Observa que el giro queda completamente determinado si conocemos el punto que utilizaremos como centro de rotación y el ángulo de giro. Por convención, el ángulo siempre se medirá contrario al movimiento de los punteros del reloj.

Rotación en un sistema cartesiano

La rotación en torno al origen en un sistema cartesiano se puede determinar fácilmente si el ángulo de rotación es múltiplo de 90º. Si el ángulo es distinto a esto, su estudio escapa a la profundidad de la PSU.

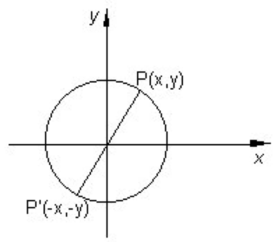
Rotación en 90°

El punto P(x ,y) se transforma en el punto P’(-y ,x)



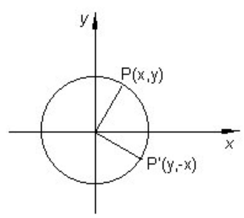
Rotación en 180°

El punto P(x,y) se transforma en el punto P'(-x,-y)



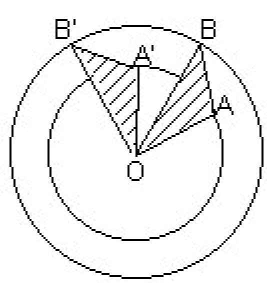
Rotación en 270°

El punto P(x,y) se transforma en el punto P'(y,-x)



Propiedades de la rotación

Supongamos que el segmento $\overline{AB}$ de la figura se ha rotado en torno al punto O en un ángulo .



Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(1) AB = A'B'
(2) $\Delta BOA \cong \Delta B'OA'$

2.3. Reflexión en torno a un eje

Sea una recta L y un punto P de modo que el punto no esté contenido en ella.

La reflexión del punto A en torno a la recta L es un punto A', de modo que se cumplen las siguientes condiciones:

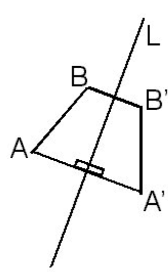
(1) $\overline{AA'} \perp L$
(2) AP = PA'

Observaciones:

- Si el punto A está en la recta L, su imagen es el mismo punto.
- Se dice que A' es el simétrico de A en torno a L.

Propiedades de la reflexión en torno a un eje

Supongamos que el segmento $\overline{AB}$ de la figura se ha reflejado en torno a la recta L, transformándose en el segmento $\overline{A'B'}$.

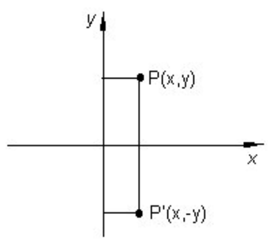


Entonces se tienen las siguientes propiedades:

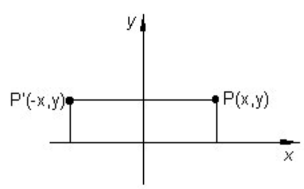
(1) AB = A'B'
(2) AA' // BB'
(3) L es la simetral de $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$
(4) L es el eje de simetría del cuadrilátero AA'B'B
(5) Al reflejar una figura en torno a un eje, se obtiene una figura congruente, produciéndose una simetría axial.

Reflexión en torno a un eje en un sistema cartesiano

Reflexión en torno al eje *x*:



El punto P(x ,y) se transforma en el punto P'(x ,-y).
Reflexión en torno al eje *y:*



El punto P(x ,y) se transforma en el punto P'(-x ,y).

Ejemplo:

¿Qué coordenadas tiene el punto A(-3,4) si se refleja en torno al eje x y después en torno al eje y?

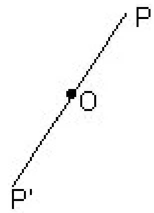
Si A se refleja en torno al eje x: A(-3,4) queda en A'(-3,-4)

Si A' se refleja en torno al eje y: A'(-3,-4) queda en A''(3,-4)

Respuesta: (3,-4)

2.4. Reflexión en torno a un punto

Supongamos que tenemos un punto P y un punto O diferente de P.

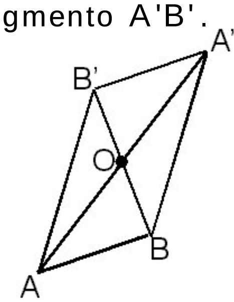


La reflexión de P en torno de O es un punto P' que cumple las siguientes condiciones:

(1) O, P y P' son colineales
(2) OP = OP'

Propiedades de la reflexión en torno a un punto

Supongamos que el segmento $\overline{AB}$ de la figura se ha reflejado en torno al punto O, transformándose en el segmento $\overline{A'B'}$.



Entonces, se tienen las siguientes propiedades:

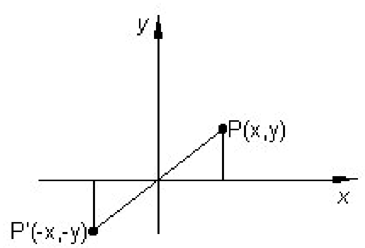
(1) AB = A'B'
(2) ABA'B' es un paralelogramo

Observaciones:

- Al efectuar una reflexión a un segmento en torno a un punto, se obtiene un segmento paralelo y congruente.
- Si un punto coincide con el centro de reflexión, su imagen es el mismo punto.
- Al reflejar una figura en torno a un punto, se obtiene una figura congruente produciéndose una simetría central en torno al punto.

Reflexión en torno al origen en un sistema cartesiano

Reflejar un punto en torno al origen es equivalente a efectuar un giro en 180° en torno a este punto, por lo tanto, la reflexión de P(x,y) en 180° es el punto P'(-x,-y):



Para mayor información acerca de congruencias y transformaciones isométricas, te sugerimos los siguientes sitios:

Simetría central:

http://nti.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/Actividades/Transformaciones/simetria_central.htm

Congruencia y transformaciones isométricas:

http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/desarrolloconcepto/congruencia_desarrollo.htm

3. TESELACIONES

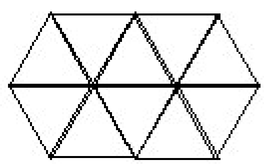
Teselar un plano es recubrirlo con figuras geométricas de modo que no se superpongan ni dejen espacio entre ellas.

3.1. Teselaciones regulares

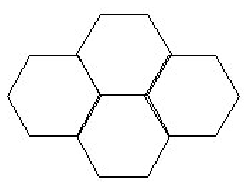
Si se tesela con polígonos regulares de un mismo tipo, se llama teselación regular.

Ejemplos de teselaciones regulares:

Con triángulos equiláteros:



Con hexágonos regulares:

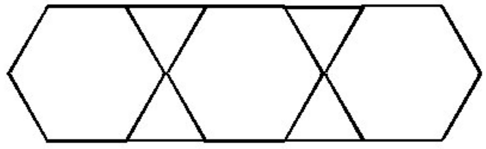


3.2. Teselaciones semirregulares

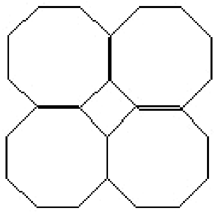
Si se tesela con polígonos regulares de diferente tipo, se llama teselación semirregular.

Ejemplos de teselaciones semirregulares:

Con hexágonos y triángulos equiláteros:



Con octógonos y cuadrados:



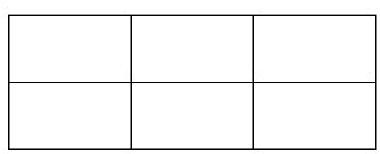
Puedes ver más ejemplos de teselaciones semirregulares en:

http://www.sectormatematica.cl/media/NM1/NM1_MOSAICOS.doc

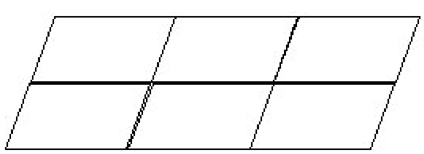
3.3. Teselaciones con polígonos no regulares

Ejemplos de teselaciones con polígonos no regulares:

Con rectángulos:



Con paralelogramos:



En todas las teselaciones las figuras se obtienen a partir de las figuras base, aplicándoles una transformación isométrica. Por ejemplo, si en la última figura partimos de un paralelogramo inicial, los demás se obtienen aplicándoles una traslación.

Te sugerimos visitar las siguientes páginas de Internet para que repases el tema de teselaciones:

http://personal.telefonica.terra.es/web/emiliomartin2002/mosaicos_y_teselaciones.htm
http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/teselacion/Otras_teselaciones.htm#Teselación%20del%20plano%20por%20triángulos%20no%20equiláteros. (contiene software interactivo donde puedes teselar con diferentes figuras)

A continuación puedes ver un **mapa conceptual** que relaciona las transformaciones isométricas con la congruencia de figuras: